**Άσκηση 1.** Να βρεθεί ένα σημείο της ευθείας

$$(\epsilon): \ \{2x + 3y + z - 5 = 0, \ 6x + 7y + 8z - 6 = 0\}$$

καθώς και ένα διάνυσμα παράλληλο προς αυτή.

**Άσκηση 2.** Να βρεθεί η ευθεία:

$\alpha)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 2, -1)$ και είναι παράλληλη:
  (1) προς το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = (1, 0, 0)$.
  (2) προς την ευθεία $(\epsilon): \ \{3x + 2y - z - 3 = 0, \ x - 3y + 4z - 2 = 0\}$.

$\beta)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 2, 0)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία

$$(\epsilon): \ \{x + y + z + 1 = 0, \ x - y + 2z + 2 = 0\}.$$

**Άσκηση 3.** Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο ευθειών οι οποίες να είναι:

(1) κάθετες μεταξύ τους,
(2) παράλληλες μεταξύ τους,
(3) συμβατές μεταξύ τους,
(4) ασύμβατες μεταξύ τους.

**Άσκηση 4.** Θεωρούμε τις ευθείες:

$$(\epsilon_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{4}, z = 2 \ \text{ και } \ (\epsilon_2): x = \frac{2(y-1)}{7} = 2(z-1).$$

$\alpha)$ Να εξετάσετε αν αυτές είναι συνεπίπεδες.
$\beta)$ Να εξετάσετε αν αυτές τέμνονται (χωρίς να βρείτε πιθανό σημείο τομής).
$\gamma)$ Να προσδιορίσετε τη γωνία αυτών.

**Άσκηση 5.** Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $A(-1, 2, 0)$ ως προς το επίπεδο $(\pi): \ x + 2y - z + 1 = 0$.

**Άσκηση 6.** Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2, 3)$ και $B(4, 5, 6)$, καθώς και η ορθή προβολή αυτής στο επίπεδο $(\pi): \ 8x + 7y - 6z - 5 = 0$.

**Άσκηση 7.** Θεωρούμε την ευθεία

$$(\epsilon_1): \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}, \ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι παράλληλη προς το επίπεδο $(\pi): -x + y + z - 1 = 0$.
Επιπλέον, θεωρούμε ευθεία $(\epsilon_2)$ για την οποία γνωρίζουμε, ότι διέρχεται από το σημείο $A(0, 1, 1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\epsilon): \{-x + 2y - z - 2 = 0, \ x + 2y - 2z - 2 = 0\}$.

(1) Να προσδιοριστούν ο πραγματικός αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και η ευθεία $(\epsilon_2)$.

(2) Να προσδιορίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $(\epsilon_1)$ με το επίπεδο $(\pi_*) : 4x + 2y + 2z - 1 = 0$ και την απόσταση του σημείου $A(1, 1, 2)$ από την ευθεία $(\epsilon_1)$.

(3) Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ είναι ασύμβατες. Στη συνέχεια να βρεθεί η κοινή κάθετος των δύο αυτών ευθειών και η ελάχιστη απόσταση αυτών.

**Άσκηση 8.** Δίνονται τα σημεία $A(1, -1, 2), B(0, 1, -3), \Gamma(1, 1, 0)$. Να προσδιοριστούν οι εξισώσεις της διχοτόμου της γωνίας $B\widehat{\Gamma}A$.

**Άσκηση 9.** Θεωρούμε τις ευθείες:

$$(\epsilon_1) : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3} \text{ και } (\epsilon_2) : \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+3}{2}.$$

$\alpha)$ Να αποδείξετε ότι είναι συμβατές και να βρεθεί το σημείο τομής $A$.

$\beta)$ Να βρεθεί ευθεία $(\epsilon)$ η οποία διέρχεται από το $A$ και είναι κάθετη στις $(\epsilon_1)$ και $(\epsilon_2)$.

**Άσκηση 10.** Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1, z_1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $(\epsilon) : \{x - \alpha z - \lambda = 0,\ y - \beta z - \mu = 0\}$, όπου $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ θεωρούνται γνωστά.

**Άσκηση 11.** Να εξετάσετε **με χρήση ισομετριών** αν τα τετράπλευρα $\delta_1 = \{(5, 2), (7, 2), (5, 5), (7, 5)\}$ και $\delta_2 = \{(0, -1), (0, -3), (-3, -3), (-3, -1)\}$ του επιπέδου είναι ίσα.

**Άσκηση 12.** $\alpha)$ Δίνονται τα σημεία $A(1, -1, 2), B(2, 2, 2), \Gamma(0, 1, -3), \Delta(1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Έστω $\Pi$ το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\varphi(\Pi)$ το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ όπου $A', B', \Gamma', \Delta'$, οι εικόνες των $A, B, \Gamma, \Delta$, μέσω ενός ορθογώνιου γεωμετρικού μετασχηματισμού $\varphi$. Να υπολογιστεί το εμβαδό του τετραπλεύρου $\varphi(\Pi)$.

$\beta)$ Δίνονται τα συνεπίπεδα σημεία $A(1, -1, 2), B(0, \lambda, 2), \Gamma(-1, 1, 0), \Delta(1, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $\Pi$ το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\varphi(\Pi)$ το τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ όπου $A', B', \Gamma', \Delta'$, οι εικόνες των $A, B, \Gamma, \Delta$, μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού $\varphi$ του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παριστάνει στροφή περί τον άξονα $Oz$ κατά γωνία $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

Να υπολογιστεί το εμβαδό του τετραπλεύρου $\varphi(\Pi)$.